

ESPINTENSOR DE LANCZOS

L. Islas-Gamboa, J. López-Bonilla, P. Zúñiga-Vázquez,
ESIME-Zacatenco,
Instituto Politécnico Nacional,
Anexo Edif. 3, Col. Lindavista, CP 07738 México D.F.
E-mail: jlopezb@ipn.mx

| | |
|--|----------|
| INTRODUCCION..... | 1 |
| CAPITULO I. Generador del tensor Conformal | |
| Introducción..... | 2 |
| 1.- Superpotencial de Lanczos..... | 2 |
| 2.- Formalismo de Newman–Penrose..... | 3 |
| CAPITULO II. Espíntensores de Minkowski y Weert | |
| Introducción..... | 5 |
| 1.- Espacio – tiempo plano | 5 |
| 2.- Campo de Liénard–Wiechert | 7 |
| CONCLUSIONES..... | 9 |
| REFERENCIAS..... | 9 |

INTRODUCCION

Hace 23 años Lanczos mostró que en todo 4-espacio de Riemann el tensor conformal es generado por un tensor K_{abc} (que él llamó espíntensor) cuyo significado físico (si lo tiene) aún se desconoce. Es extraño que casi nadie le preste atención a este resultado tan interesante, sólo recientemente Fernández-López-Ovando-Rosales (1985) lograron calcular K_{ijr} para diversos campos gravitacionales. La construcción del espíntensor es muy difícil mediante el enfoque tensorial, es más exitoso utilizar el formalismo de Newman-Penrose (1962), por esta razón en el presente trabajo indicamos ecuaciones tipo NP equivalentes a las relaciones tensoriales de Lanczos. Con la herramienta desarrollada se obtienen los superpotenciales de Minkowski (relatividad especial) y Weert (1974) (electrodinámica de cargas puntuales) y también se expone una clasificación Petrov del campo de Liénard-Wiechert calculándose las correspondientes direcciones principales.

CAPITULO I

GENERADOR DEL TENSOR CONFORMAL

INTRODUCCION

En la sección 1 del presente capítulo se expone el resultado de Lanczos (1962) en forma tensorial, y en la sección 2 dicho resultado se transfiere al formalismo de Newman-Penrose (NP) (1962). La idea esencial es la presencia de un tensor de tercer orden que genera al tensor de Weyl, en general es difícil calcular este superpotencial de Lanczos y solo recientemente Fernández-López-Ovando-Rosales (FLOR) (1985) lograron obtenerlo para diversos campos gravitacionales.

1.- Superpotencial de Lanczos

Mediante el cálculo variacional Lanczos (1962) probó que en todo espacio-tiempo existe K_{abc} generador del tensor conformal (emplearemos las cantidades y notación de Torres (1985)):

$$C_{pqjb} = K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} + g_{pb}K_{jq} - g_{pj}K_{qb} + g_{qj}K_{pb} - g_{qb}K_{pj} \quad (1.a)$$

con las propiedades:

$$K_{aij} = -K_{iaj}, \quad K_{abc} + K_{bca} + K_{cab} = 0, \quad K_a^c{}^c = 0 \quad (1.b)$$

$$K_{ab}{}^c{}_{;c} = 0 \quad (1.c)$$

$$K_{rj} = K_{jr} \equiv K_r^c{}_{j;c} \quad (1.d)$$

No se conoce el significado físico-geométrico del espíntensor K_{ijr} ; ningún autor observa la simetría de K_{jr} . Bampi-Caviglia (1983) dieron una demostración rigurosa de (1.a) y obtuvieron K_{bct} para algunos R_4 tipo 0; diversos investigadores opinan que en el caso general K_{abt} será un objeto no-local, es decir, dependerá de toda la geometría del espacio-tiempo, sin embargo, FLOR (1985) han calculado el superpotencial de Lanczos para las métricas de Schwarzschild, Kasner (1921), Narlikar-Karmarkar (1949), Gódel (1949), Taub (1951) y Bertotti (1959), y en todos los casos K_{ij} resultó ser local.

En los cálculos C_{ijkc} es dato y la incógnita K_{bat} debe obtenerse a partir de (1.a) con las restricciones (1.b,c,d), pero este enfoque directo no es conveniente porque (1.a) no proporciona un método sistemático para despejar a K_{ijc} ; es más útil proyectar (1) sobre la tétrada nula, esto se hace en la próxima sección.

Lanczos (1962) afirma que K_{bcd} será importante en la unificación de efectos cuánticos y gravitacionales, por ello lo bautizó con el nombre de espíntensor: Taub (1966,75) no comparte esta opinión. Por otro lado, Maher-Zund (1968) y Zund (1975) han mostrado que el espinor asociado a K_{ijr} satisface una ecuación para partículas con masa en reposo nula y espín 2 (por ejemplo, gravitones), así que permanece abierta la interpretación de K_{bcd} .

2. Formalismo de Newman-Penrose

Aquí indicaremos ecuaciones tipo NP con la misma información que (1) las cuales fueron obtenidas por FLOR (1985), nos limitaremos a exponer los resultados ignorando los pasos intermedios.

Construyamos el tensor:

$$Q_{abc} = K_{abc} + i * K_{abc} \quad (2.a)$$

que en virtud de (1.b) satisface:

$$Q_{abc} = -Q_{bac}, \quad Q_a{}^c{}_c = 0 \quad (2.b)$$

entonces la tétrada de NP conduce a la expresión:

$$Q_{abc} = 2[\Omega_0 U_{ab} \lambda_c + \Omega_1 (M_{ab} \lambda_c - U_{ab} m_c) + \Omega_2 (V_{ab} \lambda_c - M_{ab} m_c) - \Omega_3 V_{ab} m_c - \Omega_4 U_{ab} \bar{m}_c + \\ + \Omega_5 (U_{ab} n_c - M_{ab} \bar{m}_c) + \Omega_6 (M_{ab} n_c - V_{ab} \bar{m}_c) + \Omega_7 V_{ab} n_c], \quad (2.c)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= K_{(1)(4)(4)} \quad , \quad \Omega_4 = K_{(1)(4)(1)} \\ \Omega_1 &= K_{(1)(4)(2)} \quad , \quad \Omega_5 = K_{(1)(4)(3)} \\ \Omega_2 &= K_{(3)(2)(4)} \quad , \quad \Omega_6 = K_{(3)(2)(1)} \\ \Omega_3 &= K_{(3)(2)(2)} \quad , \quad \Omega_7 = K_{(3)(2)(3)} \end{aligned} \quad (2.d)$$

así, determinar K_{ijr} equivale a calcular las 8 cantidades complejas Ω_b , en otras palabras, el espíntensor de Lanczos tiene 16 componentes reales independientes.

Al proyectar (1.c) sobre la tétrada nula obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 - \bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 - 2\nu\Omega_1 + (3\mu + \bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma})\Omega_2 + (\bar{\alpha} - 3\beta + \tau - \bar{\pi})\Omega_3 + 2\lambda\Omega_5 + \\
& + (-\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - 3\pi)\Omega_6 + (3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho - \bar{\rho})\Omega_7 = 0, \\
& \Delta\Omega_0 - \delta\Omega_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D\Omega_5 + (\mu + \bar{\mu} - 3\gamma - \bar{\gamma})\Omega_0 + (3\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + \beta)\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2 + (3\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - \pi)\Omega_4 + \\
& + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho} - 3\rho)\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 = 0, \tag{2.e} \\
& -\Delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 - D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + (\gamma + \bar{\gamma} - 2\mu - \bar{\mu})\Omega_1 + (-\bar{\alpha} + \beta - 2\tau + \bar{\pi})\Omega_2 + \sigma\Omega_3 - \lambda\Omega_4 + \\
& + (-\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} + 2\pi)\Omega_5 + (-\varepsilon - \bar{\varepsilon} + 2\rho + \bar{\rho})\Omega_6 - \kappa\Omega_7 = 0,
\end{aligned}$$

donde $\delta, \bar{\delta}, \Delta$ y D son operadores lineales que dependen de la tétrada nula y del sistema coordenado.

De manera análoga (1.a) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= 2[-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi})\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1 + (-3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho})\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5], \\
2\psi_1 &= -\Delta\Omega_0 - 3\delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_4 + 3D\Omega_5 + (3\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu - \bar{\mu})\Omega_0 + 3(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi} - \tau)\Omega_1 - 6\sigma\Omega_2 + \\
& + (-3\alpha + \bar{\beta} - 3\pi - \bar{\tau})\Omega_4 + 3(-\varepsilon + \bar{\varepsilon} + \rho - \bar{\rho})\Omega_5 + 6\kappa\Omega_6, \\
\psi_2 &= -\Delta\Omega_1 - \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 + D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + (2\mu - \bar{\mu} + \gamma + \bar{\gamma})\Omega_1 + (\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi} - 2\tau)\Omega_2 - \sigma\Omega_3 - \\
& - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - 2\pi - \bar{\tau})\Omega_5 + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} + 2\rho)\Omega_6 + \kappa\Omega_7, \tag{2.f} \\
2\psi_3 &= -3\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 + 3\bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 + 3(-\bar{\mu} + \mu + \bar{\gamma} - \gamma)\Omega_2 + 6\nu\Omega_1 + (\bar{\alpha} - 3\beta - 3\tau - \bar{\pi})\Omega_3 - \\
& - 6\lambda\Omega_5 + 3(\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} - \pi)\Omega_6 + (3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} + 3\rho)\Omega_7, \\
\psi_4 &= 2[-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + 3\nu\Omega_2 + (-\bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma})\Omega_3 - 3\lambda\Omega_6 + (3\alpha + \bar{\beta} - \tau)\Omega_7],
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= C_{(4)(1)(4)(1)}, \quad \psi_1 = C_{(4)(3)(4)(1)}, \quad \psi_2 = C_{(2)(3)(4)(1)}, \\
\psi_3 &= C_{(3)(4)(3)(2)}, \quad \psi_4 = C_{(3)(2)(3)(2)}
\end{aligned} \tag{2.g}$$

Por último, (1.d) conduce a las ecuaciones tipo NP:

$$\begin{aligned}
K_{(1)(1)} &= \delta(\Omega_5 - \bar{\Omega}_2) - \Delta\Omega_4 + D\bar{\Omega}_3 + \bar{\nu}\Omega_0 + \bar{\lambda}(2\bar{\Omega}_1 - \Omega_1) + (-\bar{\alpha} + \beta - 3\bar{\pi})\bar{\Omega}_2 + (-\bar{\rho} - \varepsilon + 3\bar{\varepsilon})\bar{\Omega}_3 + \\
&\quad + (-\mu - \bar{\gamma} + 3\gamma)\Omega_4 + (\bar{\alpha} - \beta - 3\tau)\Omega_5 + 2\sigma\Omega_6 - \sigma\bar{\Omega}_6 + \kappa\bar{\Omega}_7, \\
K_{(1)(2)} &= -\delta\bar{\Omega}_5 - \bar{\delta}\Omega_5 + D(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + \bar{\mu}\Omega_1 + \mu\bar{\Omega}_1 - \bar{\pi}\Omega_2 - \pi\bar{\Omega}_2 + \lambda\Omega_4 + \bar{\lambda}\bar{\Omega}_4 + (\alpha - \bar{\beta} - 2\pi)\Omega_5 + \\
&\quad + (\bar{\alpha} - \beta - 2\bar{\pi})\bar{\Omega}_5 + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho)\Omega_6 + (\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\bar{\rho})\bar{\Omega}_6 + \kappa\Omega_7 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_7, \\
K_{(1)(3)} &= \delta\Omega_6 + \bar{\delta}\bar{\Omega}_3 - \Delta(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{\nu}(\Omega_1 + 2\bar{\Omega}_1) - \bar{\lambda}\Omega_2 + (\gamma - \bar{\gamma} - 3\bar{\mu})\bar{\Omega}_2 + (3\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\bar{\Omega}_3 + \nu\Omega_4 + \\
&\quad + (\gamma - \bar{\gamma} - 2\mu)\Omega_5 + (\bar{\alpha} + \beta - 2\tau)\Omega_6 - \bar{\pi}\Omega_6 + \sigma\Omega_7 + \rho\bar{\Omega}_7, \tag{2.h} \\
K_{(1)(4)} &= -\delta\bar{\Omega}_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{\mu}\Omega_0 + \bar{\lambda}\bar{\Omega}_0 - \bar{\pi}\Omega_1 + (\bar{\alpha} + \beta - 2\bar{\pi})\bar{\Omega}_1 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho})\bar{\Omega}_2 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_3 + \\
&\quad + (3\alpha - \bar{\beta} - \pi)\Omega_4 + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon - 3\rho)\Omega_5 - \sigma\bar{\Omega}_5 + \kappa(2\Omega_6 + \bar{\Omega}_6), \\
K_{(3)(3)} &= \delta\Omega_7 + \bar{\delta}\bar{\Omega}_7 - \Delta(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + \bar{\nu}\Omega_2 + \nu\bar{\Omega}_2 - \bar{\lambda}\Omega_3 - \lambda\bar{\Omega}_3 + 2\nu\Omega_5 + 2\bar{\nu}\bar{\Omega}_5 - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu)\Omega_6 - \\
&\quad - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\bar{\mu})\bar{\Omega}_6 + (-\tau + \bar{\alpha} + 3\beta)\Omega_7 + (-\bar{\tau} + \alpha + 3\bar{\beta})\bar{\Omega}_7, \\
K_{(4)(4)} &= -\delta\bar{\Omega}_0 - \bar{\delta}\Omega_0 + D(\Omega_1 + \bar{\Omega}_1) + (3\alpha + \bar{\beta} - \pi)\Omega_0 + (3\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\bar{\Omega}_0 - (\varepsilon + \bar{\varepsilon} + 3\rho)\Omega_1 - \\
&\quad - (\varepsilon + \bar{\varepsilon} + 3\rho)\bar{\Omega}_1 + 2\kappa\Omega_2 + 2\bar{\kappa}\bar{\Omega}_2 - \sigma\Omega_4 - \sigma\bar{\Omega}_4 + \kappa\Omega_5 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_5
\end{aligned}$$

En el siguiente capítulo utilizaremos (2.e, f, h) para obtener el espíntensor del espacio de Minkowski así como el superpotencial de Weert (1974).

CAPITULO II.

ESPINTENSORES DE MINKOWSKI Y WEERT

INTRODUCCION

En la Sección 1 empleamos la versión NP de (1) para obtener un espíntensor de Lanczos para el espacio de Minkowski, y en la Sección 2 utilizamos (2) para deducir el superpotencial que genera a la parte acotada del tensor de Maxwell producido por una carga puntual en movimiento arbitrario.

1. Espacio - Tiempo Plano

En ausencia de gravitación el tensor de Riemann se anula, por lo tanto $C_{ijr} = 0$ y deseamos un K_{bcd} que cumpla con esta condición a través de (1). Para tal fin

emplearemos coordenadas de Robinson-Trautman y la congruencia discutida en (44.a) de Torres (1985):

$$\begin{aligned}
\kappa = \sigma = \tau = \lambda = \varepsilon = \pi = \nu = \gamma = 0, \quad \mu = \frac{\rho}{2} = -\frac{1}{2r} \\
\alpha = \beta = \frac{i}{2\sqrt{2r}} \cdot \text{ctg} \theta, \quad \psi_a = 0, \quad a=0, \dots, 4 \\
D = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \Delta = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2r}} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)
\end{aligned} \tag{3.a}$$

que al sustituir en (2.e,f) implica el conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned}
-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + 2\beta\Omega_0 - \rho\Omega_4 &= 0, \\
-\delta\Omega_1 + D\Omega_5 + \mu\Omega_0 - \rho\Omega_5 &= 0, \\
-\delta\Omega_2 + D\Omega_6 + 2\mu\Omega_1 - 2\beta\Omega_2 - \rho\Omega_6 &= 0, \\
-\Delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_6 - \mu\Omega_2 + \rho\Omega_7 &= 0, \\
-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 - \mu\Omega_3 + 2\beta\Omega_7 &= 0, \\
\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 - \bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 + 4\mu\Omega_2 - 4\beta\Omega_3 - 2\rho\Omega_7 &= 0, \\
\Delta\Omega_0 - \delta\Omega_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D\Omega_5 + 2\mu\Omega_0 + 4\beta\Omega_4 - 4\rho\Omega_5 &= 0, \\
-\Delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 - D\Omega_6 - 3\mu\Omega_1 + 2\beta(\Omega_2 - \Omega_5) + 3\rho\Omega_6 &= 0,
\end{aligned} \tag{3.b}$$

cuya solución es inmediata

$$\Omega_a = 0, \quad a \neq 4, \quad \Omega_4 = -\frac{1}{r} \text{csc}^2 \theta \tag{3.c}$$

y por (2.c):

$$K_{abc} = \frac{1}{r} \text{csc}^2 \theta \cdot (U_{ab} \bar{m}_c + \bar{U}_{ab} m_c), \tag{3.d}$$

este espíntensor para relatividad especial es muy simple comparado con los resultados de Takeno (1964).

2. Campo de Liénard – Wiechert

En López (1982) se estudió el campo electromagnético producido por una carga puntual moviéndose arbitrariamente en el espacio de Minkowski, el correspondiente tensor de Maxwell tiene una parte T_{ac} que llamamos acotada porque es la porción dominante cerca de la carga:

$$T_{B\ bc} = q^2 r^{-4} \left[r(n_b U_c + n_c U_b) + r^2 (a^2 - Q^2) n_b n_c + \frac{1}{2} g_{bc} \right],$$

$$q = \text{carga}, \quad U_b = Q e_{(4)b} + a_b, \quad Q = r^{-1} (1 - T), \quad T = -r n^c a_c, \quad (4.a)$$

a_c = aceleración de la partícula,

además, puede checarsse que (4.a) satisface

$$T_{B\ ac} = T_{B\ ca}, \quad T_{B\ c}{}^c = 0, \quad T_{B\ a}{}^c{}_{;c} = 0 \quad (4.b)$$

Las propiedades (4.b) se cumplen si construimos $K_{B\ abc}$ con las simetrías (1.b, c, d) tal que

$$T_{B\ ab} = K_{B\ a}{}^c{}_{b;c} \equiv K_{B\ ab} \quad (4.c)$$

entonces $K_{B\ (a)(b)} = 0$ excepto

$$K_{B\ (1)(2)} = \frac{q^2}{2} r^{-4}, \quad K_{B\ (1)(3)} = -q^2 r^{-3} \bar{v}, \quad (4.d)$$

aquí nos apoyamos en la congruencia nula estudiada en (41, 42, 43) de Torres (1985):

$$\kappa = \sigma = \tau = \lambda = \varepsilon = \pi = 0, \quad \mu = \frac{\rho}{2} = -\frac{1}{2r}, \quad \alpha = \beta = \frac{i}{2\sqrt{2}r} \cdot \text{ctg} \theta,$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\text{Sen} \theta a_{(1)} + \text{Cos} \theta a_{(2)} + i \left(-\text{Cos} \theta \text{Cos} \phi a_{(1)} - \text{Cos} \theta \text{Sen} \phi a_{(2)} + \text{Sen} \theta a_{(3)} \right) \right], \quad (4.e)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[a^c p_c - i \text{ctg} \theta (\text{Cos} \phi a_{(2)} - \text{Sen} \phi a_{(1)}) \right], \quad D = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right),$$

$$\Delta = \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{v} - v) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\bar{v} + v}{\sqrt{2} \text{Sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - \left[\frac{1}{2} + r(\gamma + \bar{\gamma}) \right] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial u},$$

al colocar (4.d, e) en (2.e, h) se genera un sistema de ecuaciones (que no es necesario indicar) el cual admite la solución:

$$\Omega_B^a = 0, \quad a \neq 6,7, \quad \Omega_B^6 = -\frac{q^2}{4} r^{-3}, \quad \Omega_B^7 = q^2 r^{-2} v \quad (4.f)$$

que al sustituir en (2.c) nos conduce al superpotencial de Weert (1974) (este autor nunca mencionó cómo obtuvo su resultado):

$$K_B^{sbc} = -\frac{q^2}{4} r^{-3} \left[(3 - 4T)(e_{(4)s} n_b - e_{(4)b} n_s) n_c + 4r(a_s n_b - a_b n_s) n_c + (g_{cs} n_b - g_{cb} n_s) \right], \quad (4.g)$$

López (1982) también construyó (4.g) sin utilizar el formalismo de NP.

Si ahora seguimos la analogía con el trabajo de Lanczos (1962) entonces podemos construir un “tensor de Weyl-electromagnético” mediante (1.a, 4.c):

$$C_B^{jrim} = K_B^{jri;m} - K_B^{jrm;i} + K_B^{imj;r} - K_B^{imr;j} + g_{jm} T_B^{ir} - g_{ij} T_B^{mr} + g_{ri} T_B^{mj} - g_{rm} T_B^{ij}, \quad (4.h)$$

que al proyectar sobre la tétrada nula origina (2.f) y que en unión de (4.e, f) implica:

$$\psi_B^c = 0, \quad c = 0,1,4, \quad \psi_B^2 = q^2 r^{-4}, \quad \psi_B^3 = -q^2 r^{-3} v = -q^2 r^{-3} a_c \bar{m}^c \quad (4.i)$$

con estas cantidades ψ_B^c podemos realizar la clasificación de Petrov (CP) del potencial de Liénard-Wiechert, para este fin utilizamos un algoritmo existente en Ovando (1985), obteniéndose que:

$$\begin{aligned} \text{“Caso general } (a_c \neq 0) \quad : \quad C_B^{ijrm} \text{ es tipo II,} \\ \text{Caso particular } (a_c = 0) \quad : \quad C_B^{ijrm} \text{ es tipo D”} \end{aligned} \quad (4.j)$$

En López-Tun (1983) se desarrolló esta idea de “CP electromagnética” pero ahí sólo se concluyó que (4.h) era tipo II ó D pero no se dedujo (4.j), es decir, bajo qué circunstancias C_B^{ijrm} era de un determinado tipo Petrov, de (4.j) vemos que la aceleración de la carga decide si (4.h) es tipo II o D. Este resultado complementa las analogías encontradas por Newman (1974) entre el campo de Liénard-Wiechert y las métricas de Robinson-Trautman (1962).

En Ovando (1985) se indica cómo construir los vectores de Debever-Penrose de un tensor con las simetrías algebraicas del tensor de Weyl, así encontramos que las direcciones principales de $C_B{}_{ijm}$ son:

$$n^c \text{ (doble)}, \quad \lambda^c \text{ (simple)} \quad \text{y} \quad \lambda^c + \frac{4}{9}r^2 v \bar{v} n^c + \frac{2}{3}r(v m^c + \bar{v} \bar{m}^c) \text{ (simple)} \quad (4.k)$$

cuando $a_j = 0$ entonces λ^r se vuelve 2-degenerado. Dejamos pendiente el investigar qué papel desempeña el tercer vector de (4.k) respecto al potencial de Liénard-Wiechert.

CONCLUSIONES

Los resultados tensoriales de Lanczos (1962) se han expresado en el formalismo de NP lo cual ha permitido deducir de manera simple los espintensores de Minkowski y Weert. También se estableció la clasificación Petrov del campo de Liénard-Wiechert.

Queda pendiente la obtención del superpotencial de López (1982) que genera a la parte radiativa del tensor de Maxwell producido por una carga puntual con movimiento arbitrario, el espintensor necesariamente será no-local.

Debe ser interesante desarrollar una clasificación algebraica de K_{pgc} y encadenar ésta con la CP de C_{ijk} , este será el motivo de otra investigación.

REFERENCIAS

- | | |
|--|--|
| F. Bampi, G. Caviglia | Gen. Relat. Grav. <u>15</u> , 375 (1983) |
| B. Bertotti, | Phys. Rev. <u>116</u> , 1331 (1959) |
| J. Fernández, J. López G. Ovando M. Rosales | Reportes internos DCBI-UAM-A (1985) |
| K. Gödel, | Rev. Mod. Phys. <u>21</u> , 447 (1949). |
| E. Kasner, | Amer. J. Math. <u>43</u> , 217 (1921). |
| C. Lanczos, | Rev. Mod. Phys. <u>34</u> , 379 (1962). |
| J. López, | Tesis Doctoral ESFM-IPN (1982). |

- J. López,
D. Tun Bol. Depto. Fís. ESFM-IPN 3, No. 2,
57 (1983)
- W. F. Maher,
J.D. Zund Nuovo Cim. A57, 638 (1968).
- V.V. Narlikar,
K. R. Karmarkar Proc. Indian Acad. Sci. A29, 91 (1949).
- E. T. Newman, J, Math. Phys. 15, 44 (1974).
- E. T. Newman,
R. Penrose J. Math. Phys. 3, 566 (1962).
- G. Ovando, Tesis de Maestría ESFM-IPN (1985).
- I. Robinson,
A. Trautman Proc. Roy. Soc, London A265, 463 (1962).
- H. Takeno, Tensor N.S. 15, 103 (1964).
- A.H. Taub, Ann. of Math. 53, 472 (1951).
- _____, Perspectives in geometry and relativity,
Ed. B. Hoffman, pag. 360 (1966).
- _____, Comp. Maths. with Appls. 1, 377 (1975).
- J. Torres, Tesis de Maestría ESFM-IPN (1985)
- Ch.G. van Weert, Phys. Rev. D9, 339 (1974).
- J.D. Zund, Ann. Mat. Pura Appl. 104, 239 (1975).

